

Die ganze Wahrheit über die kritische Transkonduktanz

Dieser Artikel befasst sich mit der kritischen Transkonduktanz für Quarzoszillatoren mit Pierce-Architektur, behandelt deren physikalische Bedeutung und liefert genaue Schritt-für-Schritt-Ableitungen.

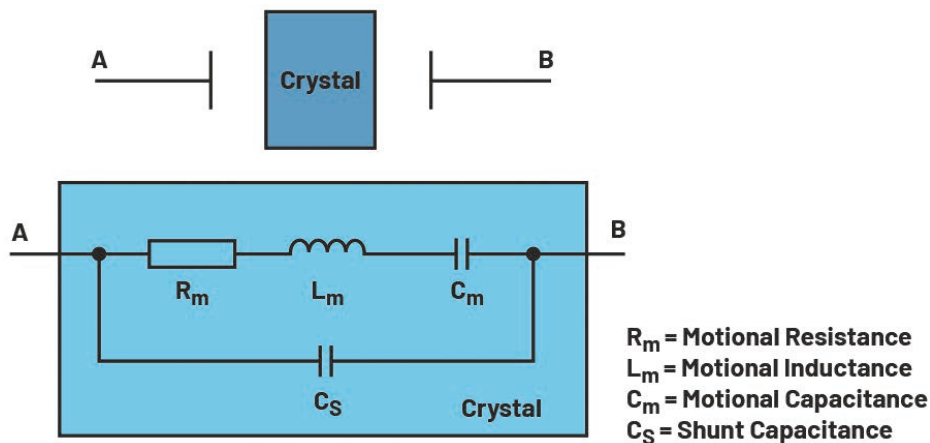


Bild 1: Elektrisches Ersatzschaltbild eines Quarzes

Die Formeln für die kritische und optimale Transkonduktanz werden häufig im Design verwendet, ihre Herleitung bleibt jedoch oft unklar. Dieser Artikel zeigt die zugrunde liegenden Zusammenhänge ausgehend von der Quarzimpedanz, der Pierce-Oszillator-Topologie und den Rückkopplungsbedingungen. Dabei wird erläutert, wie die Designformeln aus der Schaltungsanalyse entstehen und welche Bedeutung sie für die Auslegung von Quarzoszillatoren haben.

Einstellung der Frequenz

Mechanisch betrachtet stellt ein Quarz einen schwingungsfähigen Resonator dar. Er kann elektrisch modelliert werden (Bild 1). Ein angelegtes elektrisches Feld erzeugt eine mechanische Schwingung bzw. Bewegung,

während mechanische Spannungen eine elektrische Reaktion hervorrufen. Der Quarz selbst kann bei der Frequenz eine Serienresonanz aufweisen:

$$f_S = \frac{1}{2 \times \pi \times \sqrt{L_m \times C_m}}$$

Er weist auch eine Antiresonanz (im Parallelmodus) bei der Frequenz auf:

$$f_P = \frac{1}{2 \times \pi \times \sqrt{L_m \times \left(\frac{C_m \times C_S}{C_m + C_S} \right)}} = f_S \times \sqrt{1 + \left(\frac{C_m}{C_S} \right)}$$

Wenn ein Kondensator C_L parallel zum Quarz geschaltet wird, wird dieser belastet, und die Schwingungsfrequenz wird zu:

$$f_L = \frac{1}{2 \times \pi \times \sqrt{L_m \times \left(\frac{C_m \times \left(C_S + \frac{C_L}{2} \right)}{C_m + \left(C_S + \frac{C_L}{2} \right)} \right)}} = f_S \times \sqrt{1 + \frac{C_m}{C_S + \frac{C_L}{2}}}$$

Typischerweise ist $C_m \ll C_S$, was bedeutet, dass die Serien- und Parallelresonanzfrequenzen f_S und f_P sehr nahe beieinander liegen. Interessanterweise liegt die Schwingungsfrequenz bei solcher Belastung immer zwischen f_S und f_P .

Eine weitverbreitete Topologie für Quarzoszillatoren ist die Pierce-Konfiguration (Bild 2). R_F versetzt den Inverter in seinen linearen Bereich und legt den Gleichstrom-Arbeitspunkt fest, ohne das Verhalten der Wechselstromschleife wesentlich zu beeinflussen.

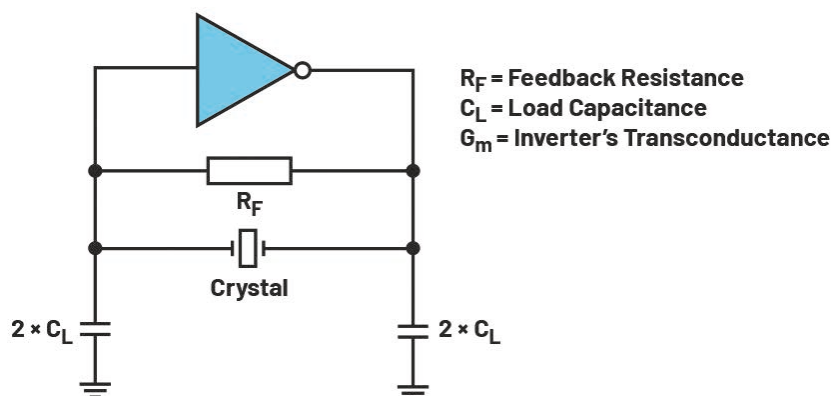
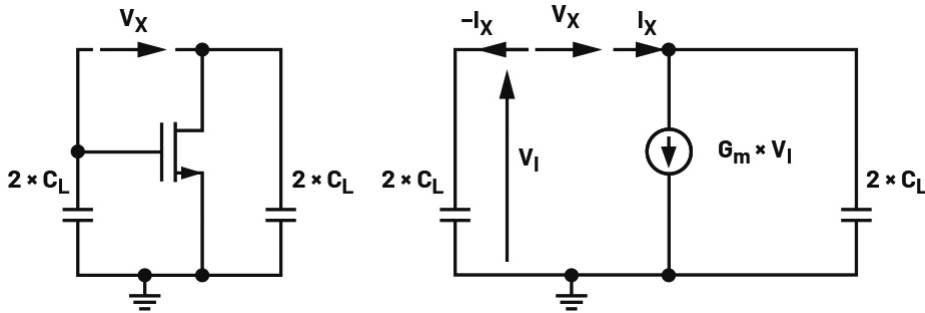


Bild 2: Pierce-Oszillatorschaltung

Autor:
Jerome Rollet
Staff Analog Design Engineer
Analog Devices
www.analog.com



Erzeugung eines negativen Widerstands

Wie bereits erwähnt, ist aufgrund des Resonators im Schaltkreis der Ansatz des negativen Widerstands die geeignetere Analyse-methode. Eine einfache Möglichkeit, einen negativen Widerstand zu erzeugen, besteht darin, die Eingangsimpedanz der Topologie zu betrachten, wie in Bild 3 dargestellt.

Berechnen Sie die dynamische Impedanz, die an V_X zu sehen ist, um zu beweisen, dass sie die Form

$$Z_X(j\omega) = \frac{-G_m}{(2 \times C_L \times \omega)^2} + \frac{1}{j \times C_L \times \omega}$$

hat, die einen negativen Widerstand erzeugt, der

$$\text{Re}\{Z_X(j\omega)\} = \frac{-G_m}{(2 \times C_L \times \omega)^2}$$

entspricht. Der vom Quarz gesehene Wechselstromkreis ist äquivalent zu der Ersatzschaltung in Bild 4.

Betrachtet man nur den Bewegungszweig (unter der Annahme, dass C_s vernachlässigt werden kann), so werden die Schwingungen für $G_m > 4 \times R_m \times (C_L \times \text{Kreisfrequenz})^2$ erreicht.

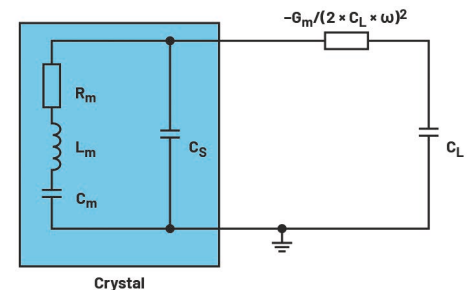


Bild 4: Äquivalenter Schaltkreis

Bild 3: Erzeugung einer negativen Impedanz

Sein Einfluss ist für die Wechselstromanalyse nebensächlich und wird daher weggelassen. In diesem Artikel wird der Inverter als ideale Transkonduktanz (G_m) modelliert.

Oszillatorkonzepte: positive Rückkopplung versus negativer Widerstand

Harmonische Oszillatoren lassen sich in zwei Hauptkategorien einteilen: mit positiver Rückkopplung und mit negativem Widerstand. Erste funktionieren, indem sie einen Teil des Ausgangssignals mit der richtigen Amplitude und Phase an den Eingang zurückführen, um das Barkhausen-Stabilitätskriterium zu erfüllen:

$$|A \times B| = 1 \text{ and } \varphi(A, B) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

A ... Verstärkung

B ... die Rückkopplungs-Übertragungsfunktion

Dieser Ansatz wird in der Regel verwendet, wenn die Verstärkungs- und Rückkopplungspfade explizit definiert sind, wie bei Wien-Brücken- oder Ring-Oszillatoren.

Oszillatoren mit negativem Widerstand zielen darauf ab, die ohmschen (verlustbehafteten) Elemente im Schaltkreis aufzuheben, sodass Energie frei zwischen imaginären Komponenten übertragen werden kann. Die Bedingung für die Schwingung lautet dann:

$$\sum_n (R_n) + R_{neg} = \sum_n (jX_n) = 0$$

Diese Sichtweise ist intuitiver, wenn ein Resonator vorhanden ist, wie beispielsweise ein LC-Schwingkreis oder ein Quarz. Gängige Beispiele sind Hartley-, Colpitts- und Clapp-Oszillatoren.

Obwohl beide Ansätze konzeptionell unterschiedlich sind und auf verschiedenen analytischen Gesichtspunkten beruhen, beschreiben sie dasselbe physikalische Phänomen.

Warum die kritische G_m wichtig ist

Die Transkonduktanz G_m ist einer der wichtigsten Design-Parameter in Quarzoszillatorschaltungen. Wenn G_m zu niedrig ist, startet

der Oszillator einfach nicht – ein Fehler, der gleichzeitig subtil und frustrierend sein kann. Um einen zuverlässigen Start zu gewährleisten, muss G_m einen Schwellenwert überschreiten, der als kritische G_m bekannt ist.

Die Falle in der Faustregel

Eine vereinfachte Formel, die manchmal zur Schätzung der kritischen Transkonduktanz verwendet wird, lautet:

$$G_{mCRIT} = \frac{1}{R_m}$$

Diese Annäherung leitet sich grob aus dem Barkhausen-Kriterium und dem Resonanzverhalten ab. Bei Serienresonanz entspricht die Impedanz des Quarzes Z in etwa R_m (unter Vernachlässigung von C_s), und man geht von einer Schleifenverstärkung von annäherungsweise $A \times B = G_m \times R_m > 1$ aus. Dieses Modell spiegelt jedoch nicht die Pierce-Oszillator-Topologie wider und liefert Ergebnisse, die nicht nur falsch sind, sondern auch im direkten Widerspruch zu dem beabsichtigten Verhalten stehen. Wie später gezeigt wird, erfordert eine Erhöhung von R_m tatsächlich eine höhere G_m .

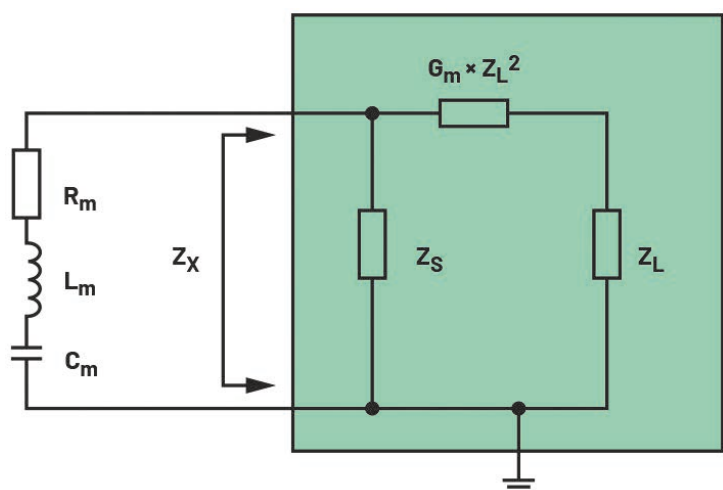


Bild 5: Vom Quarz gesehene Impedanz

Der konventionelle Ansatz

Eine bequeme Möglichkeit, die Parallelkapazität zu berücksichtigen, besteht darin, sie in die vom Quarz gesehene Impedanz Z_x zu integrieren (s. Bild 5).

Unter Verwendung der grundlegenden Impedanztransformation kann man folgendes ableiten:

$$Z_x = \frac{G_m \times Z_S \times Z_L^2 + Z_S \times Z_L}{G_m \times Z_L^2 + Z_S + Z_L}$$

Der Realteil dieser Impedanz kann wie folgt dargestellt werden:

$$\operatorname{Re}\{Z_x(j\omega)\} = \frac{-G_m \times 4 \times C_L^2}{(4 \times C_S \times C_L + 4 \times C_L^2)^2 \times \omega^2 + (G_m \times C_S)^2}$$

Um die Widerstandsverluste auszugleichen, muss der negative Widerstand dem Bewegungswiderstand entsprechen:

$$R_m = \frac{G_m \times 4 \times C_L^2}{(4 \times C_S \times C_L + 4 \times C_L^2)^2 \times \omega^2 + (G_m \times C_S)^2}$$

Dies führt zu der folgenden quadratischen Gleichung:

$$\rightarrow G_m^2 - \frac{4 \times G_m}{R_m} \times \left(\frac{C_L}{C_S}\right)^2 + 16 \left(C_L + \frac{C_L^2}{C_S}\right)^2 \times \omega^2 = 0$$

Durch Berechnung der Diskriminante können wir feststellen, ob eine reelle Lösung existiert:

$$\Delta = \frac{16}{R_m^2} \times \left(\frac{C_L}{C_S}\right)^4 - 64 \times \left(C_L + \frac{C_L^2}{C_S}\right)^2 \times \omega^2$$

Ist die Diskriminante negativ, gibt es in dem System keine reellen Lösungen. Ist sie positiv, erfüllen zwei Werte von G_m die Gleichung, und für jeden Wert dazwischen ist eine Schwingung möglich. Die untere Grenze ist als kritische Transkonduktanz $G_{m \text{ CRIT}}$ bekannt, die das für den Start erforderliche Minimum darstellt. Die Obergrenze ist die maximale Transkonduktanz $G_{m \text{ MAX}}$, oberhalb derer keine stabile Schwingung aufrechterhalten werden kann. Die genauen Werte können mit einem numerischen Gleichungslöser ermittelt werden.

$$G_{m \text{ CRIT}} = \frac{4}{R_m} \times \left(\frac{C_L}{C_S}\right)^2 - \sqrt{\Delta}$$

$$G_{m \text{ MAX}} = \frac{4}{R_m} \times \left(\frac{C_L}{C_S}\right)^2 + \sqrt{\Delta}$$

Durch Lösen der Bedingung

$$\frac{\partial \operatorname{Re}\{Z_x(j\omega)\}}{\partial G_m} = 0$$

kann die optimale Transkonduktanz bestimmt werden, die dem Punkt entspricht, an dem der negative Realteil der vom Quarz gesehene Impedanz maximiert ist. Dies ergibt den Ausdruck:

$$G_{m \text{ OPT}} = 4 \times \omega \times C_L \times \left(1 + \frac{C_L}{C_S}\right)^2$$

Wenn G_m von 0 in positiver Richtung nach Unendlich zunimmt, entwickelt sich die vom Quarz wahrgenommene Impedanz in der komplexen Ebene. Dieser Verlauf veranschaulicht den Übergang von der kritischen G_m über die optimale G_m bis zur maximalen G_m . Außerhalb dieses Bereichs können die Verluste nicht kompensiert werden, und das System kann keine Schwingungen aufrechterhalten (s. Bild 6).

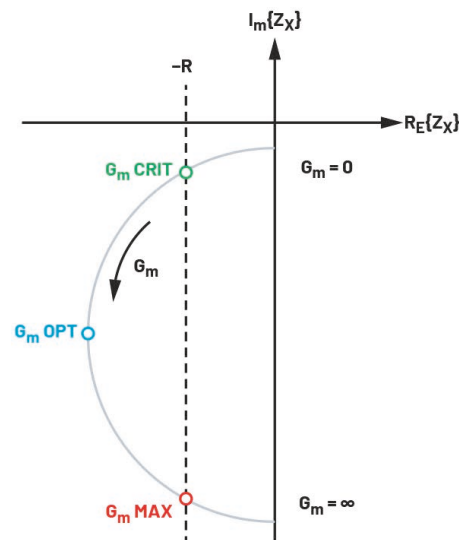


Bild 6: Impedanz in der komplexen Ebene

Der interessante Wert ist in der Regel $G_{m \text{ CRIT}}$. Unter der Annahme, dass $G_m \times C \ll 4 \times (C \times C + C^2) \times \text{Kreisfrequenz}^2$, kann die Impedanz Z näherungsweise wie folgt berechnet werden:

$$R_m = \frac{-\operatorname{Re}\{Z_x(j\omega)\}}{\frac{-G_m \times 4 \times C_L^2}{(4 \times C_S \times C_L + 4 \times C_L^2)^2 \times \omega^2}}$$

Diese Vereinfachung wird manchmal als „kleine G_m -Annäherung“ bezeichnet. Die physikalische Intuition ist, dass R_m klein ist (da Quarze sehr hohe Güten zwischen 10.000 und 100.000 aufweisen) und daher die damit verbundenen Verluste minimal sind. Folglich sollte der Beitrag des negativen Impedanzkreises (G_m) minimal sein. Unter dieser Annahme kann die kritische G_m in einer kompakteren Form ausgedrückt werden:

$$G_{m \text{ CRIT}} = 4 \times R_m \times (2 \times \pi \times f_s)^2 \times (C_L + C_S)^2$$

Ein Umweg, der Erkenntnisse liefert

Bei der bisherigen Methode wird der Quarz als allgemeine Impedanz behandelt, ohne dass man zwischen seinen ohmschen und imaginären Komponenten unterscheidet. Es gibt einen alternativen Ansatz, dessen Herleitung zwar etwas länger ist, der aber tiefere Einblicke und praktische Vorteile bietet.

Dazu vereinfacht man zunächst den Bewegungszweig des Quarzes, indem man seine induktiven und kapazitiven Elemente zu einem einzigen Reaktanzterm X zusammenfasst. Aus Gründen der Einheitlichkeit in der Notation wird die Shunt-Kapazitätsreaktanz als jX_S definiert, wobei $X_S = -1/(C_S \times \text{Kreisfrequenz})$ ist, siehe Bild 7.

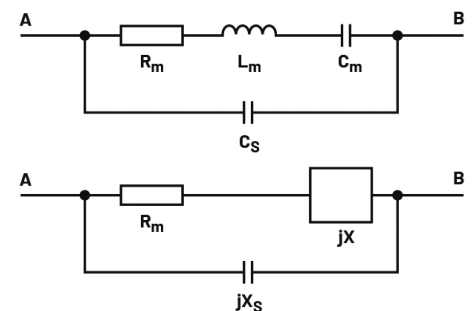


Bild 7: Alternatives Quarzmodell

Die Impedanz des Quarzes (zwischen A und B) kann wie folgt geschrieben werden:

$$Z_{AB} = \frac{(R_m + jX) \times (jX_S)}{R_m + j(X + X_S)}$$

Der effektive Widerstand zwischen den Knoten A und B entspricht dem Realteil der Impedanz, die an diesen Punkten gemessen wird:

$$R_{EQ} = \operatorname{Re}\{Z_{AB}\} = \frac{R_m \times X_S^2}{R_m^2 + (X + X_S)^2}$$

Wenn der Quarz an den Lastkondensator angeschlossen ist, kann der Schaltkreis nun wie in Bild 8 gezeichnet werden.

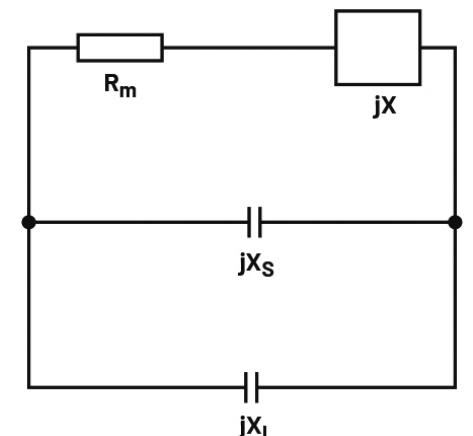


Bild 8: Alternatives Quarzmodell mit Last

Bei Resonanz heben sich die imaginären Komponenten gegenseitig auf, und die Impedanz wird rein real. Daher gilt:

$$X = X_S // X_L$$

$$X = \frac{1}{\omega \times (C_L + C_S)}$$

Wenn wir dieses Ergebnis in die vorherige R_{EQ} -Gleichung einsetzen, erhalten wir:

$$R_{EQ} = \operatorname{Re}\{Z_{AB}\} = \frac{R_m \times X_S^2}{R_m^2 + \left(\frac{1}{\omega \times (C_L + C_S)} - \frac{1}{\omega \times C_S} \right)^2}$$

Dies lässt sich vereinfachen zu:

$$R_{EQ} = \frac{R_m \times X_S^2}{R_m^2 + \frac{1}{C_S^2 \times \omega^2} \left(\frac{C_L}{C_L + C_S} \right)^2}$$

Wenn die Annahme

$$R_m \ll \frac{1}{C_S \times \omega} \left(\frac{C_L}{C_L + C_S} \right)$$

zutrifft, kann der vom Verstärker gesehene Ersatzwiderstand des Quarzes annäherungsweise wie folgt ausgedrückt werden:

$$R_{EQ} = R_m \left(1 + \frac{C_S}{C_L} \right)^2$$

Diese Formel stellt eine nützliche Verbindung zwischen der internen Verlustleistung des Quarzes, seinem Bewegungswiderstand R_m und dem Kapazitätsverhältnis C_S/C_L her.

Quarze haben eine maximal zulässige Verlustleistung, bei deren Überschreitung die langfristige Zuverlässigkeit beeinträchtigt werden kann. Die abgegebene Effektivleistung kann nun als $P_{rms} = R_{EQ} \times I_{ms}^2$ geschätzt werden; so lässt sich überprüfen, ob der Oszillator innerhalb sicherer Ansteuerungspegel arbeitet.

Leider wird der Begriff R_{EQ} oft als äquivalenter Serienwiderstand (Equivalent Series Resistance, ESR) bezeichnet und bei der Oszillorauslegung uneinheitlich verwendet. In einigen Zusammenhängen bezieht sich ESR auf den effektiven Widerstand, den der Verstärker sieht (was als R_{EQ} bezeichnet wurde). In anderen Fällen bezieht er sich auf den Bewegungswiderstand (elektrischen Serienwiderstand), der die intrinsischen Verluste innerhalb des Quarzes selbst dar-

stellt (was als R_m bezeichnet wurde). Um die Verwirrung noch zu steigern, bezeichnen einige Anbieter R_m als ESR, während bestimmte Dokumente ESR verwenden, um R_m im Zusammenhang mit kritischen G_m -Berechnungen zu beschreiben. Typischerweise ist C_S viel kleiner als C_L , sodass R_m und R_{EQ} numerisch nahe beieinander liegen. Dies könnte erklären, warum die Unterscheidung oft unbemerkt bleibt. Hoffentlich hilft diese Klarstellung den Leserinnen und Lesern, zwischen den beiden zu unterscheiden und zu verstehen, welcher Wert in jedem Kontext angemessen ist: Berechnung der Startbedingungen und Resonanzfrequenz oder Schätzung des Ansteuerungspegels.

Zurück zum Ersatzschaltbild: Der Oszillator kann nun wie in Bild 9 dargestellt werden.

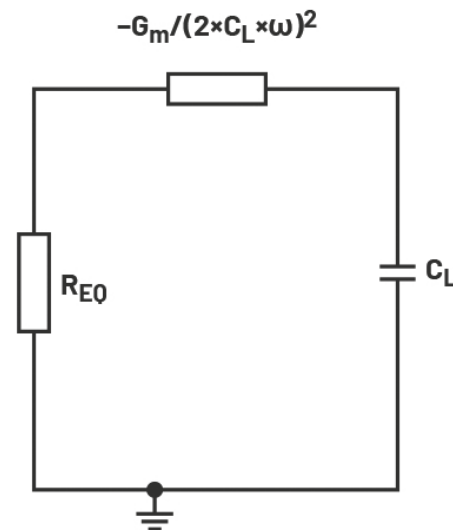


Bild 9: Ein weiteres Ersatzschaltbild

Um die Schwingung aufrechtzuerhalten, muss der vom Verstärker dargestellte negative Widerstand den vom Quarz gesehenen Ersatzwiderstand aufheben:

$$\frac{G_{mCRIT}}{(2 \times C_L \times \omega)^2} = R_m \left(1 + \frac{C_S}{C_L} \right)^2$$

Durch Umstellen dieser Gleichung erhält man denselben Ausdruck, der zuvor für die kritische Transkonduktanz abgeleitet wurde:

$$G_{mCRIT} = 4 \times R_m \times (2 \times \pi \times f)^2 \times (C_L + C_S)^2$$

Die Kraft der Vier

Letztendlich stellt die kritische G_m die genaue mathematische Schwelle dar, die für eine nachhaltige Schwingung erforderlich ist. Er stellt sicher, dass der Verstärker die im Quarz verlorene Energie exakt kompensiert. Um jedoch einen zuverlässigen Start

unter realen Bedingungen zu gewährleisten, sehen Entwickler in der Regel einen Überschuss an G_m vor. Dieser berücksichtigt Schwankungen bei R_m , Abhängigkeiten vom Ansteuerungspegel und Startdynamik. In der Praxis wird üblicherweise ein Sicherheitsfaktor von 4 angewendet, um eine robuste Leistung über Temperatur-, Alterungs- und Prozessschwankungen hinweg zu gewährleisten.

Fazit

Dieser Artikel zeigt, warum die kritische G_m für den Start und die Stabilität von Quarzoszillatoren unerlässlich ist. Wir haben die Abhängigkeiten von R_m , C_S und C_L untersucht, die häufige Gefahr betont, sich ausschließlich auf $1/R_m$ zu verlassen, und zwei sich ergänzende Ansätze zur Lösung des Problems vorgestellt. Jede Methode bietet einzigartige Einblicke: Die eine liefert einen vollständigen Überblick über den Betriebsbereich, während die andere eine wichtige Beziehung zum Ansteuerungspegel aufzeigt. Das Verständnis dieser Prinzipien versetzt Entwickler in die Lage, über Faustregeln hinauszugehen und präzise Berechnungen anzuwenden, die einen zuverlässigen Start und eine robuste Leistung unter realen Bedingungen gewährleisten.

Wer schreibt:

Jerome Rollet ist Staff Analog Design Engineer in der Data Center and Energy Group bei Analog Devices. Bevor er 2014 zu ADI kam, war er technischer Mitarbeiter bei Maxim Integrated. Jerome verfügt über 17 Jahre Erfahrung im Bereich Energiemanagement und Mixed-Signal-Schaltungsdesign für Verbraucher-, Industrie- und Automobilanwendungen. Er hat einen Master of Science in Elektrotechnik vom Grenoble Institute of Technology und einen Master of Research in Mikroelektronik und Nanoelektronik von der Universität Grenoble Alpes.

Referenzen

Frerking, Marvin E. Crystal Oscillator Design and Temperature Compensation. Litton Educational Publishing, Inc., 1978.

Razavi, Behzad. „The Crystal Oscillator.“ IEEE Solid-State Circuits Magazine, Bd. 9, Juni 2017.

Eric Vittoz, Marc Degrauwe und Serge Bitz „High-Performance Crystal Oscillator Circuits: Theory and Application.“ IEEE Journal of Solid-State Circuits, Bd. 23, Juni 1988. ◀